مخاطب گرامی! به احترام
تهیه‌کنندگان این فایل، از بازنشر
غیرمجاز آن بپرهیزید.

[redacted]

معادلات دیفرانسیل

رایگان

کد محصول:
۱۰۲۲

www.Amad-Group.ir

۵۰ پرسش پایان ترم دانشگاههای سراسری استان تهران

ویرایش:
بهار ۱۳۹۹

۱ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۸–۹۷

با استفاده از سری توانی، جواب عمومی معادله زیر را حول نقطه صفر بیابید.

$$4xy'' + 2(1-x)y' - y = 0$$

۲ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۸–۹۷

توابع مجهول $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ را از دستگاه معادلات زیر بیابید.

$$\begin{cases} x'(t) + y'(t) = 2\sinh \\ y'(t) + z'(t) = e^{t} \\ z'(t) + x'(t) = 2e^{t} + e^{-t} \\ x(0) = y(0) = 1,\ z(0) = 0 \end{cases}$$

۳ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۸–۹۷

لاپلاس معکوس تابع روبرو را بیابید.

$$Y(s) = s\ln\left(\frac{s-1}{s+1}\right)e^{-\pi s}$$

www.Amad-Group.ir

۴ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۸–۹۷

مطلوب است محاسبه انتگرال مقابل.

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} te^{-2t}\frac{\sin r}{r}\,drdt$$

۵ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۸–۹۷

جواب عمومی معادله دیفرانسیل روبرو را بیابید.

$$y^{(3)} + 9y' = xe^{x} + 1 + \sin x$$

۶ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۸–۹۷

با توجه به اینکه $y_1 = x^3$ و $y_2 = x-1$ جواب‌های معادله همگن نظیر به معادله زیر می‌باشند، با استفاده از روش تغییر پارامتر جواب عمومی آن را بیابید.

$$(x^2 - 2x)y^2 + 2(1-x)y' + 2y = 6(x^2 - 2x)^2$$

۷ تهران / پایان ترم دوم ۹۸–۹۷

دستگاه مقدار اولیه غیرهمگن روبرو را حل کنید.

$$x' = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix} x + \begin{Bmatrix} ۴e^t \cos t \\ ۰ \end{Bmatrix} \;;\; x(۰) = \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{Bmatrix}$$

۸ تهران / پایان ترم دوم ۹۸–۹۷

حاصل انتگرال روبرو را به‌دست آورید.

$$\int_۰^\infty \int_۰^t \cosh x e^{-۲t} \sin^۲(t-x)\,dx\,dt$$

www.Amad-Group.ir

۹ تهران / پایان ترم دوم ۹۸–۹۷

معادله انتگرالی روبرو را حل کنید.

$$y''(x) = \sinh x + ۲e^x \int_۰^x e^{-t} y'(t)\,dt \;;\; y(۰) = y'(۰) = ۰$$

۱۰ تهران / پایان ترم دوم ۹۸–۹۷

با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + ۲y' + ۳y = \sin t + \delta(t-\pi) \;;\; y(۰) = y' = ۰$$

توجه شود که $\delta(t-\pi)$ و $\delta_\pi(t)$ معادل یکدیگرند.

۱۱ تهران / پایان ترم دوم ۹۸–۹۷

الف) نشان دهید نقطه $x = ۰$ یک نقطه تکین نامنظم برای معادله دیفرانسیل $x^۴ y'' + \lambda y = ۰$ می‌باشد.

ب) با استفاده از تغییر متغیر $t = \frac{۱}{x}$ نشان دهید معادله فوق به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$t\frac{d^۲y}{dt^۲} + ۲\frac{dy}{dt} + \lambda t y = ۰$$

ج) کنترل کنید که نقطه $t = ۰$ یک نقطه تکین منظم برای معادله به‌دست آمده در قسمت (ب) می‌باشد.

د) جواب‌های معادله قسمت (ب) را به روش سری‌ها حول نقطه $t = ۰$ به‌دست آورید.

۱۲ صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۷–۱۳۹۶

دستگاه غیرخطی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} x' = x^۳ + xy^۲ \\ y' = ۲x^۲ y + y^۳ \end{cases}$$

با استفاده از روش لیاپانف، پایدار بودن یا نبودن دستگاه حول نقطه یا نقاط بحرانی را بررسی کنید.

راهنمایی: قرار دهید $V(x, y) = ax^۲ + by^۲$ و a و b مناسبی را پیدا کنید.

۱۳ صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۷–۱۳۹۶

دستگاه غیرخطی زیر را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = x(۶ - x - ۳y) \\ \frac{d}{dt}y = y(۶ - ۳x - y) \end{cases}$$

www.Amad-Group.ir

الف) نقطه یا نقاط بحرانی دستگاه را پیدا کنید.

ب) پایداری یا عدم پایداری آن نقاط را با ذکر دلیل مشخص کنید.

ج) شکل تقریبی جواب‌های دستگاه را در ربع اول $(x \geq 0 , y \geq 0)$ رسم کنید.

۱۴ صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

نشان دهید که مبدا برای معادله زیر نقطه تکین منظم است. سپس جواب این معادله به شکل سری حول مبدا که برای آن $\lim_{x \to 0} y(x) = 0$ است را بیابید.

$$2x^2 y'' + x(2x+1)y' - y = 0$$

۱۵ صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

معادله انتگرالی زیر را روی $[0 , +\infty)$ حل کنید.

$$y''(t) = y(t) + 1 + 15\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau \, , \; y(0) = 0 \, , \; y'(0) = 0$$

۱۶ صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

دستگاه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) - u_0(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) + \delta(t-5) \\ x(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

یادآوری: $\delta(t-5)$ تابع ضربه در $t = 5$ است و

$$\begin{cases} u_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases} \end{cases}$$

۱۷ صنعتی شریف / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + \sin 2t \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \\ x(0) = 1 , \; y(0) = 2 \end{cases}$$

۱۸ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

با استفاده از روش ماتریسی دستگاه مقابل را حل کنید.

$$Y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 1 \\ \cot t \end{bmatrix}$$

www.Amad-Group.ir

۱۹ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

الف) اگر $L\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$، $L\{J_2(t)\}$ را به‌دست آورید.

(راهنمایی: می‌دانیم $\frac{d}{dx}(x^{-p}J_p(x)) = -x^{-p}J_{p+1}(x)$)

ب) نشان دهید: $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

۲۰ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y'(t)=\cos t+\int_{0}^{t}y(x)\cos(t-x)dx \\ y(0)=1 \end{cases}$$

۲۱ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

معادله مرتبه اول $y'=x^2+y^2$ را با استفاده از تغییر متغیر $y=-\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ به یک معادله مرتبه دوم تبدیل نموده و سپس جواب عمومی معادله مرتبه دوم حاصل را با استفاده از تغییر متغیر $u=\sqrt{x}\,w(\frac{x^2}{2})$ به‌دست آورید.

۲۲ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را حول $x=0$ به‌دست آورید.

$$x^2y''-(2x+2x^2)y'+(x^2+2x+2)y=0$$

۲۳ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

با استفاده از سری توانی، جواب عمومی معادله زیر حول نقطه صفر را بیابید.

$$3x(2+3x)y''-4y'+4y=0$$

۲۴ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

به کمک تبدیل لاپلاس، جواب معادله مقابل را بیابید. $xy''+(x-1)y'+y=0\,,\ y(0)=0$

www.Amad-Group.ir

۲۵ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

مطلوب است محاسبه جواب معادله انتگرال زیر.

$$y'(t)+\int_{0}^{t}y(s)\cos(t-s)ds=\cos t\ ,\ y(0)=0$$

۲۶ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

مطلوب است محاسبه موارد زیر:

الف) تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=t\int_{0}^{t}e^{-2u}(\frac{e^{u}-1}{u})du$

ب) تبدیل لاپلاس معکوس تابع $F(s)=\frac{e^{-3s}}{s^2+4}\ln(\frac{s^2+1}{s^2})$.

۲۷ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

جواب معادله ناهمگن مقابل را بیابید.

$$(3x+2)^2y''+3(3x+2)y'-36y=x$$

۲۸ علم و صنعت ایران / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

اگر $y' = \frac{2\sin x}{\sqrt{x}}$ جواب معادله همگن نظیر به معادله زیر باشد، جواب عمومی آن را بیابید.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = x\sqrt{x}$$

۲۹ صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

معادله دیفرانسیل $y'' + (1 - \frac{7}{4x^2})y = 0$ را با استفاده از تغییر متغیر $y = ux^{\frac{1}{2}}$ به معادله دیفرانسیل بسل تبدیل و حل کنید.

۳۰ صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

ابتدا نشان دهید $a = 0$ یک نقطه‌ی غیرعادی منظم معادله‌ی دیفرانسیل $xy'' + y' + y = 0$ است و سپس یکی از جواب‌های معادله را به روش سری‌های توانی حول صفر به‌دست آورید.

۳۱ صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x' - y' + 8x + 3y = 1 \\ x' - y' - y = 0 \end{cases} , \quad x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$$

۳۲ صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

مسأله مقدار اولیه $y'(t) - e^t \int_0^t e^{-\theta} y''(\theta)d\theta = y(t) + u_1(t) \ , \ y(0) = y'(0) = 0$ را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید.

۳۳ صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

تبدیل وارون لاپلاس تابع $F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{(s-1)^4 - 16}$ را به‌دست آورید.

۳۴ صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی / پایان ترم دوم ۹۷-۱۳۹۶

اگر $F(s) = L[\frac{\cos t - e^t}{t}]$، مقدار $F(2)$ را بیابید.

۳۵ صنعتی شریف / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

فرض کنید $A(t)$ یک ماتریس $n \times n$ باشد که درایه‌های آن توابعی از t هستند و علامت پریم، یعنی مشتق نسبت به t را نمایش می‌دهد.

الف) نشان دهید اگر $A(t)A'(t) = A'(t)A(t)$، آنگاه $(e^{A(t)})' = A'(t)e^{A(t)}$.

ب) با استفاده از (الف) جواب عمومی دستگاه زیر را به‌دست آورید:

$$\begin{cases} x_1' = (-\sin t)x_1 + (-\cos t)x_2 \\ x_2' = (\cos t)x_1 + (-\sin t)x_2 \end{cases}$$

گروه آموزشی
www.Amad-Group.ir

۳۶ صنعتی شریف / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

با استفاده از روش مقادیر ویژه و بردارهای ویژه جواب عمومی دستگاه $X' = AX$ را به‌دست آورید که در آن A ماتریس زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ -۴ & -۱ & ۰ \\ ۴ & -۸ & ۲ \end{bmatrix}$$

۳۷ صنعتی شریف / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

تابع $f:[۰,\infty) \to \mathbb{R}$ را با ضابطه $f(t) = \begin{cases} \sin ۲t & : \quad ۰ \le t < \pi \\ ۰ & : \quad t \ge \pi \end{cases}$ در نظر بگیرید و با استفاده از روش تبدیلات لاپلاس جواب مسأله زیر را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} y'' + y = f(t) + \delta(t - ۲\pi) \\ y(۰) = ۰ \ , \quad y'(۰) = ۱ \end{cases}$$

۳۸ صنعتی شریف / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

با استفاده از روش تبدیلات لاپلاس جواب مسأله زیر را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} ty'' + (۲t + ۳)y' + (t + ۳)y = ۳e^{-t} \\ y'(۰) = ۱ \end{cases}$$

www.Amad-Group.ir

۳۹ صنعتی شریف / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

با استفاده از روش سری‌ها یک جواب از معادله دیفرانسیل زیر را به‌صورت یک سری حول صفر به‌دست آورید. سپس، با مشخص کردن اینکه این سری چه تابعی را نمایش می‌دهد، به کمک روش کاهش مرتبه جواب دوم (مستقل خطی با جواب اول) را محاسبه کرده و جواب عمومی معادله را بنویسید.

$$t(t-۱)y'' + (۳t-۱)y' + y = ۰ \qquad (۰ < t < ۱)$$

۴۰ صنعتی شریف / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

با استفاده از روش سری‌ها دو جواب مستقل خطی از معادله دیفرانسیل زیر را به‌صورت سری‌هایی حول صفر به‌دست آورید. سپس با مشخص کردن اینکه این دو سری چه توابعی را نمایش می‌دهند، جواب عمومی معادله را بنویسید.

$$۴ty'' + ۲y' + y = ۰ \qquad (t > ۰)$$

۴۱ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

به کمک مقادیر ویژه دستگاه مقابل را حل کنید.

$$X' = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

۴۲ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

الف) مطلوبست محاسبه انتگرال مقابل.

$$\int_۰^{\infty} te^{-t} J_۰(۳t)dt$$

ب) تبدیل لاپلاس تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$f(t) = \int_۰^{t} (t-x)^۳ (x^۳ e^{۲x} \sinh x)dx$$

گروه آموزشی آمد
www.Amad-Group.ir

۵۰ پرسش پایان ترم

۴۳ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

الف) با استفاده از بسط تابع نمایی تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)=\dfrac{e^{-\frac{1}{s}}}{s^{2}}$ را به‌دست آورید.

ب) معادله مقابل را با شرط داده شده حل کنید.

$$t\frac{d^{2}y}{dt^{2}}+y=0\ ,\ \ y(0)=0$$

۴۴ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

با استفاده از تغییر متغیر $u=x^{\alpha}y$ معادله مقابل را حل کنید.

$$xy''+(1+2\alpha)y'+xy=0$$

۴۵ صنعتی امیرکبیر / پایان ترم اول ۹۷-۱۳۹۶

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را حول نقطه $x=0$ با روش سری‌ها بیابید.

$$xy''+(1-x)y'-y=0$$

۴۶ تهران / پایان ترم دوم ۹۶-۹۵

دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$x'=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & -1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}te^{2t}\\ te^{-2t}\end{pmatrix}$$

۴۷ تهران / پایان ترم دوم ۹۶-۹۵

جواب مساله مقدار اولیه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس به‌دست آورید. منظور از u تابع پله‌ای و δ تابع دلتای دیراک می‌باشد.

$$2y''+10y=3u_{12}(t)-5\delta(t-4)\ ;\ y(0)=-1\ ;\ y'(0)=-2$$

۴۸ تهران / پایان ترم دوم ۹۶-۹۵

جواب معادله دیفرانسیل زیر را به روش سری‌ها، در نزدیکی $x_0=0$ به‌دست آورید.

$$xy''+2y'+xy=0\ ;\ x>0$$

www.Amad-Group.ir

۴۹ تهران / پایان ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

دستگاه معادلات دیفرانسیل روبرو را حل کنید.

$$X'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}t$$

۵۰ تهران / پایان ترم اول ۹۶-۱۳۹۵

مسأله مقدار مرزی زیر را توسط تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y''+y=\delta(t-1)+u_{\pi}(t)\sin t\ ,\ y(0)=0\ ,\ y(\tfrac{1}{2})=1$$

www.Amad-Group.ir